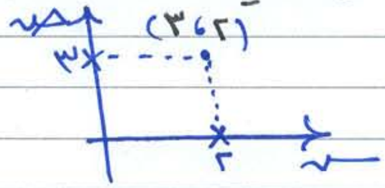
الاحداثيات القطبية

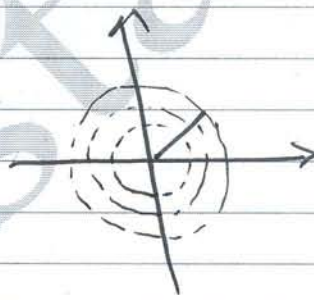
* مراجعة سريعة للاحداثيات الديكارتية :- حيث يتم تحديد موضع أي نقطة في المستوى الاحداثي (المستوى الديكارتي) من خلال موقعها بالنسبة لمحور السينات والصادات حيث يُقسّم المستوى الى خطوط افقية وعمودية متقاطعة وأي نقطة في المستوى نحددها من خلال تقاطع الخط الافقي والعمودي (وهذا الذي هو معروف للجميع)



مثال

الاحداثيات القطبية :- هنا يتم تحديد موضع النقطة في المستوى بعد تقسيم المستوى الى دوائر مركزها نقطة الاصل وننطلق من هذه النقطة أشعة مركزها نقطة الأصل ويحدد أي شعاع بزاوية ميله على المحور الافقي (القطبي) في الاتجاه الموجب.

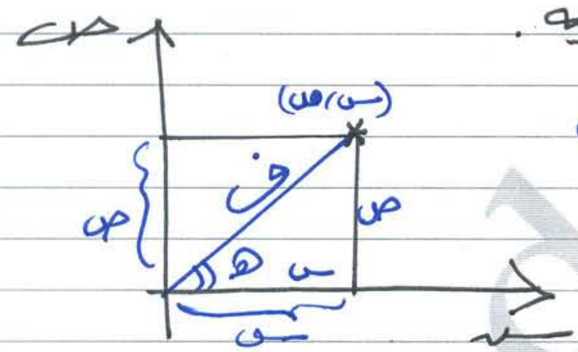
والنقطة تحدد بتقاطع الشعاع هذه الدوائر وبالتالي للتحديد أي نقطة نحتاج :-



١) طول الشعاع

٢) الزاوية التي يصنعها الشعاع مع المحور القطبي

لنأخذ مثال لعام للتحويل من الصورة الديكارتية الى الصورة القطبية.



عملية التحويل بسيطة جداً حيث نرسم الشعاع للوصول للنقطة (س، ص) ونفرض أن طول هذا الشعاع هو (ف) وأن الزاوية التي يصنعها الشعاع مع المحور القطبي هي هـ

* وعليه وباستخدام نظرية فيثاغورس

$ف^2 = س^2 + ص^2$

وعليه فإن $ف = \sqrt{س^2 + ص^2}$

فمثلاً لو كانت النقطة هي (٣، ٤)

تكون $ف = \sqrt{9+16}$

$ف = \sqrt{25} = 5$

* وباستخدام تعريف الاقترانات الدائرية

$جاهـ = \frac{ص}{ف}$

$\boxed{ص = ف\ جاهـ}$

ومن تعريف الـ (جتا) يكون

$جتاهـ = \frac{س}{ف}$

$\boxed{س = ف\ جتاهـ}$

∴ الاحداثيات القطبية تكون (ف جتاهـ، ف جاهـ)

علاقة القطوع المخروطية بالصورة القطبية :-

وهنا عادةً المسألة تعطينا حركة نقطة معينة في المستوى الإحداثي ولكنها بالصورة القطبية والمطلوب إرجاعها إلى الصورة الإحداثية الديكارتية بدلالة س و ص نمثل ذلك في المثال السابق

مثال ١ تتحرك نقطة في المستوى و(س، ص) حيث أن

س = ٥ جتا هـ

ص = ٥ جا هـ

أوجد المعادلة الديكارتية أي المعادلة بدلالة س، ص فقط بدون الدوال المثلثية للشكل الذي ترسمه النقطة وما اسم هذا الشكل!

الحل ← جتا هـ = $\frac{س}{٥}$ بالتربيع جتا² هـ = $\frac{1}{25}$ س² ...(١)

جا هـ = $\frac{ص}{٥}$ بالتربيع جا² هـ = $\frac{1}{25}$ ص² ...(٢)

بجمع ١ و ٢ ← $\frac{1}{25}$ س² + $\frac{1}{25}$ ص² = جا² هـ + جتا² هـ

ولكن $\boxed{\text{جا² هـ + جتا² هـ = ١}}$

← $\frac{1}{25}$ س² + $\frac{1}{25}$ ص² = ١ بالضرب بـ ٢٥

← $\boxed{\text{س² + ص² = ٢٥}}$

(١) جا² س + جتا² س = ١

وهذه دائرة مركزها (٠، ٠) ونصف قطرها ٥ .

مثال ٢ :- تتحرك النقطة ن(س، ص) في المستوى الإحداثي حيث أن

(٢) جتا ٢ن = ١ − ٢ جا² ن

س = $\sqrt{2}$ جا ن

ص = ١ + جتا ٢ن

اكتب معادلة المحل الهندسي للنقطة ن.

الحل :- بتربيع المعادلة الأولى س² = ٢ جا² ن ...(١)

ص = ١ + (١ − ٢ جا² ن) ...(٢)

بجمع المعادلتين

س² + ص = ٢ جا² ن + ٢ − ٢ جا² ن

س² + ص = ٢

← س² = − ص + ٢

← س² = −(ص − ٢)

وهذه معادلة قطع مكافئ رأسه (٠، ٢)

وهو قطع مكافئ مفتوح للأسفل

ومحور تماثله هو س = ٠ (محور الصادات)

مثال ٣ تتحرك نقطة في المستوى الإحداثي حسب العلاقة ن(س ، ص) حيث

$س = ٣ جا ن$

$ص = ٤ جتا ن$

اكتب معادلة المحل الهندسي للنقطة ن ؟ موضحاً اسم هذا المحل الهندسي ؟

الحل بتربيع الطرفين

$س^٢ = ٩ جا^٢ ن \leftarrow جا^٢ ن = \frac{س^٢}{٩}$ --- (١)

$ص^٢ = ١٦ جتا^٢ ن \leftarrow جتا^٢ ن = \frac{ص^٢}{١٦}$ --- (٢)

بالجمع $جا^٢ ن + جتا^٢ ن = \frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{١٦}$

$\Leftarrow \frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه (٠ ، ٠)

وطول محوره الأكبر $= ٢ \times ٤ = ٨$

وطول محوره الأصغر $= ٢ \times ٣ = ٦$

مثال ٤ :- تتحرك نقطة في المستوى الإحداثي حسب العلاقة

$س = ٣ جا ن - ٥$

$ص = ٤ جتا ن + ٣$

اكتب معادلة المحل الهندسي موضحاً اسمه وبعض خصائصه .

الحل * $س + ٥ = ٣ جا ن \leftarrow جا ن = \frac{س + ٥}{٣}$ --- (١)

$ص - ٣ = ٤ جتا ن \leftarrow جتا ن = \frac{ص - ٣}{٤}$ --- (٢)

بتربيع الطرفين $\leftarrow جا^٢ ن = \frac{(س+٥)^٢}{٩}$ ، بالجمع

$جتا^٢ ن = \frac{(ص-٣)^٢}{١٦}$

$\leftarrow \frac{(س+٥)^٢}{٩} + \frac{(ص-٣)^٢}{١٦} = جا^٢ ن + جتا^٢ ن$

$\leftarrow \frac{(س+٥)^٢}{٩} + \frac{(ص-٣)^٢}{١٦} = ١$

وهذه معادلة قطع ناقص مركزه (-٥ ، ٣)

وطول محوره الأكبر $= ٨$

وطول محوره الأصغر $= ٦$

....

مثال ٥ : تتحرك النقطة ن (س ، ص) في المستوى حيث
س = ١ + قا هـ
ص = ظا هـ
ما معادلة مسار النقطة ن وما نوعها ؟

③
١ + ظا² س = قا² س
متطابقة مشهورة
١ + ظتا² س = قتا² س
حسب المتطابقة ③

الحل
س = ١ + قا هـ | ص = ظا هـ
س − ١ = قا هـ | ص² = ظا² هـ ... ②
(س − ١)² = قا² هـ ... ①

① − ② ← (س − ١)² − ص² = قا² هـ − ظا² هـ
← (س − ١)² − ص² = ١
وهذه معادلة قطع زائد
مركزه (١ ، ٠) .

مثال ٦ : تتحرك النقطة (س ، ص) في المستوى حيث
س = ٣ + جتا² هـ ، ص = جتا هـ
أوجد نوع القطع المخروطي الذي تتحرك فيه النقطة

اترك للتدريب
الحل
ص² = ½ (س − ٢)
مكافئ

مثال ٧
تمرين
إذا كان س = أ (جتا هـ − جا هـ)
ص = ب (جتا هـ + جا هـ)
أثبت أن معادلة الحركة لجسم في المستوى الإحداثي هي معادلة قطع ناقص

مثال ٨: أوجد معادلة المحل الهندسي للنقطة (س ، ص) والتي تتحرك في المستوى
حيث أن س = ٢ + ٣ (جتا هـ − جا هـ)
ص = ٣ + ٢ (جتا هـ + جا هـ)

الحل : س − ٢ = ٣ (جتا هـ − جا هـ) ← (س − ٢)/٣ = (جتا هـ − جا هـ)
← (س − ٢)²/٩ = جتا² هـ − ٢ جا هـ جتا هـ + جا² هـ ... ①

ص − ٣ = ٢ (جتا هـ + جا هـ) ← (ص − ٣)/٢ = جتا هـ + جا هـ
← (ص − ٣)²/٤ = جتا² هـ + ٢ جا هـ جتا هـ + جا² هـ ... ②

① : (س − ٢)²/٩ = جتا² هـ − ٢ جا هـ جتا هـ + جا² هـ   بجمع المعادلتين
② : (ص − ٣)²/٤ = جتا² هـ + ٢ جا هـ جتا هـ + جا² هـ

← (س − ٢)²/٩ + (ص − ٣)²/٤ = ٢   بالقسمة ÷ ٢

(س − ٢)²/١٨ + (ص − ٣)²/٨ = ١ معادلة قطع ناقص مركزه (٢ ، ٣) .

أرجو أن تكون الفكرة قد وصلت
مع خالص الأمنيات بالتوفيق للجميع
أسعد مصطفى ١٢

إعداد : أسعد مصطفى [99137750]
E-mail : class12math@gmail.com

الإحداثيات القطبية ٤/٤